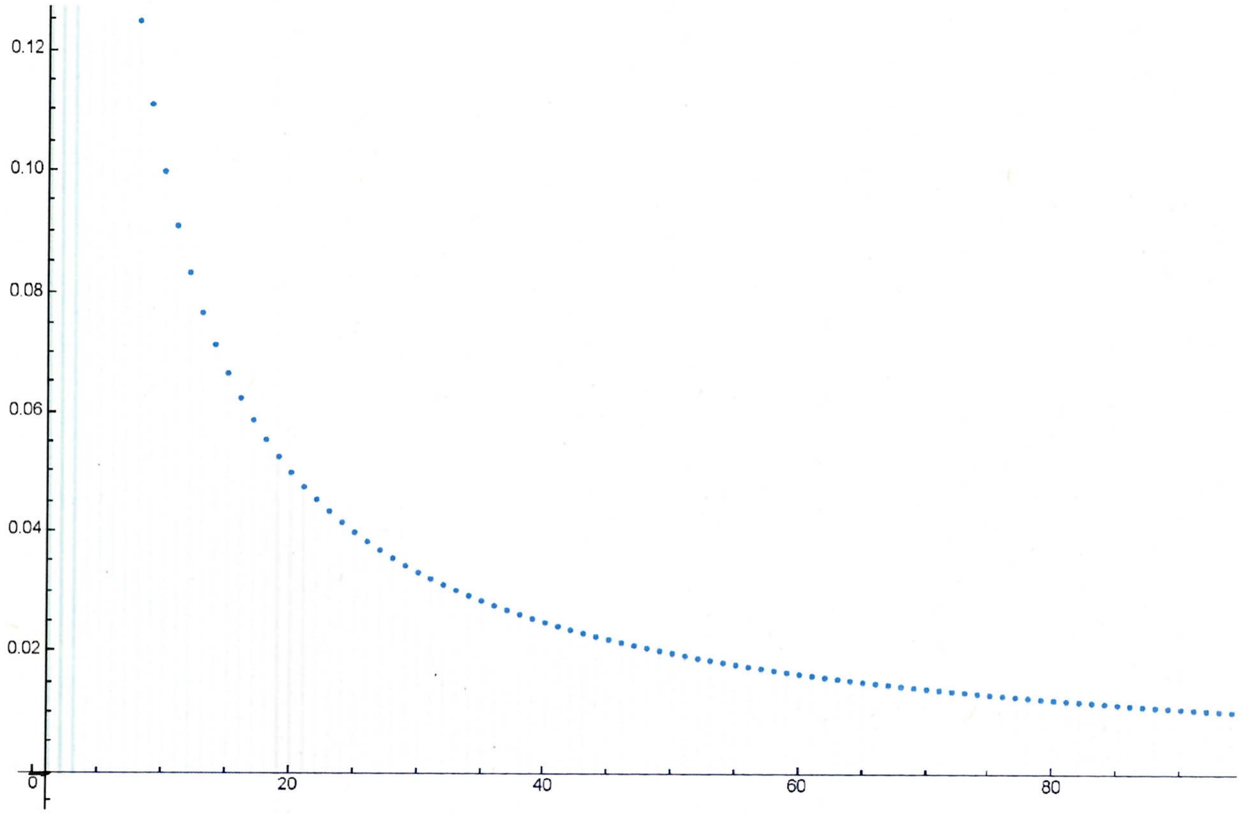
In[2]:= `DiscretePlot[1 / n, {n, 1, 100}]`

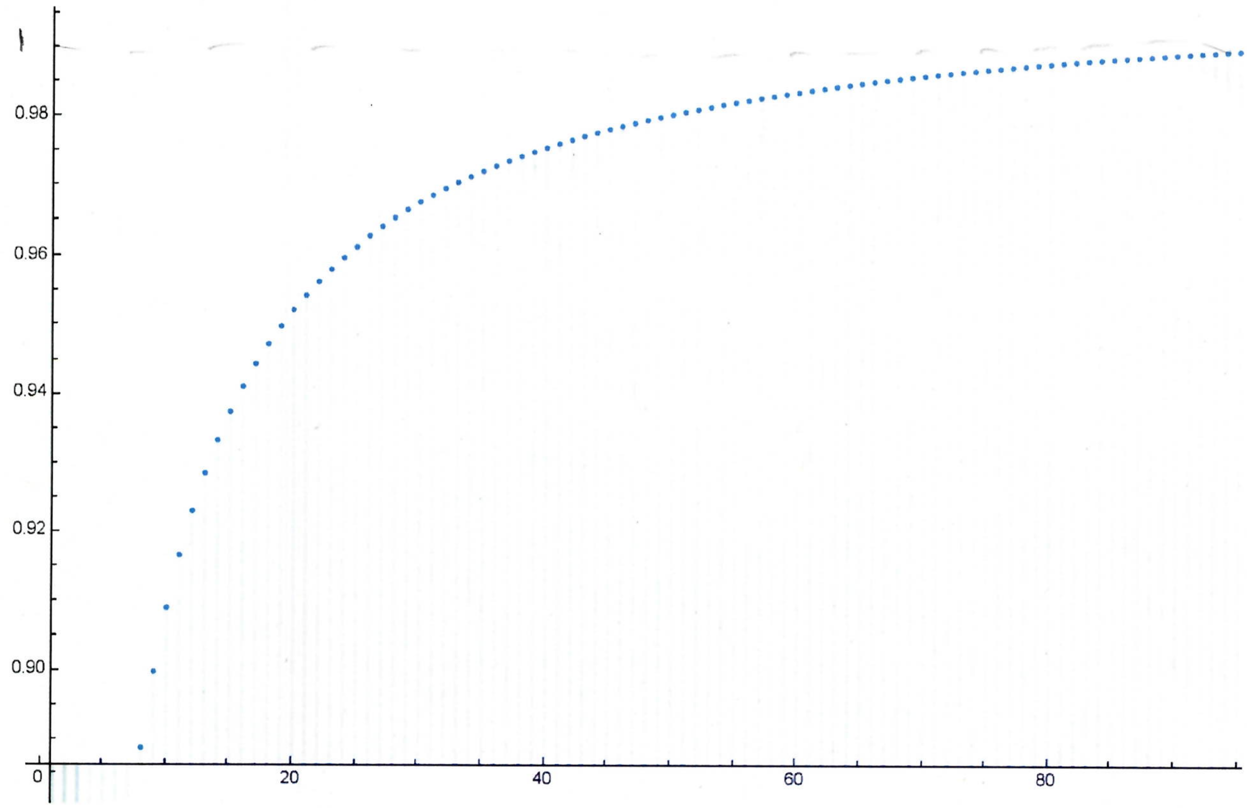
Out[2]=



In[4]:=

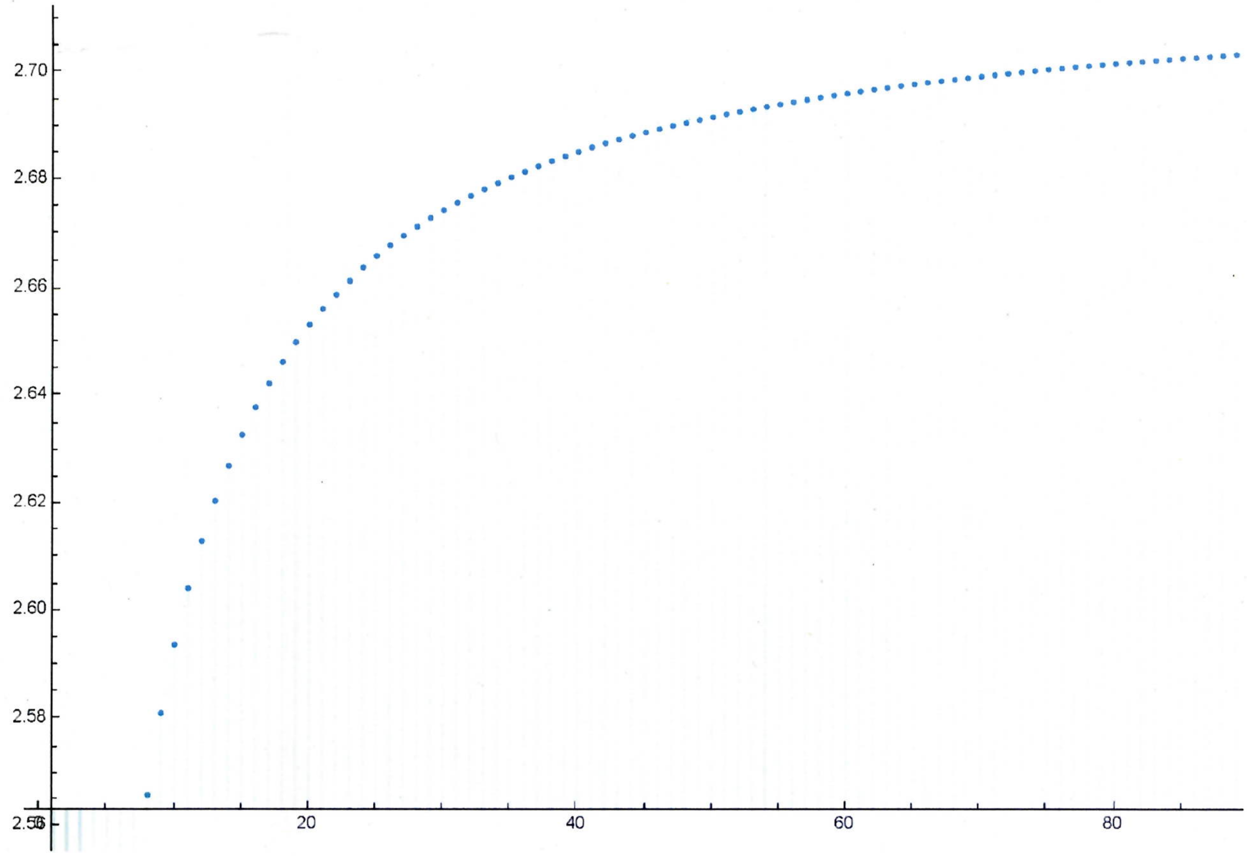
```
DiscretePlot[n / (n + 1), {n, 1, 100}]
```

Out[4]=

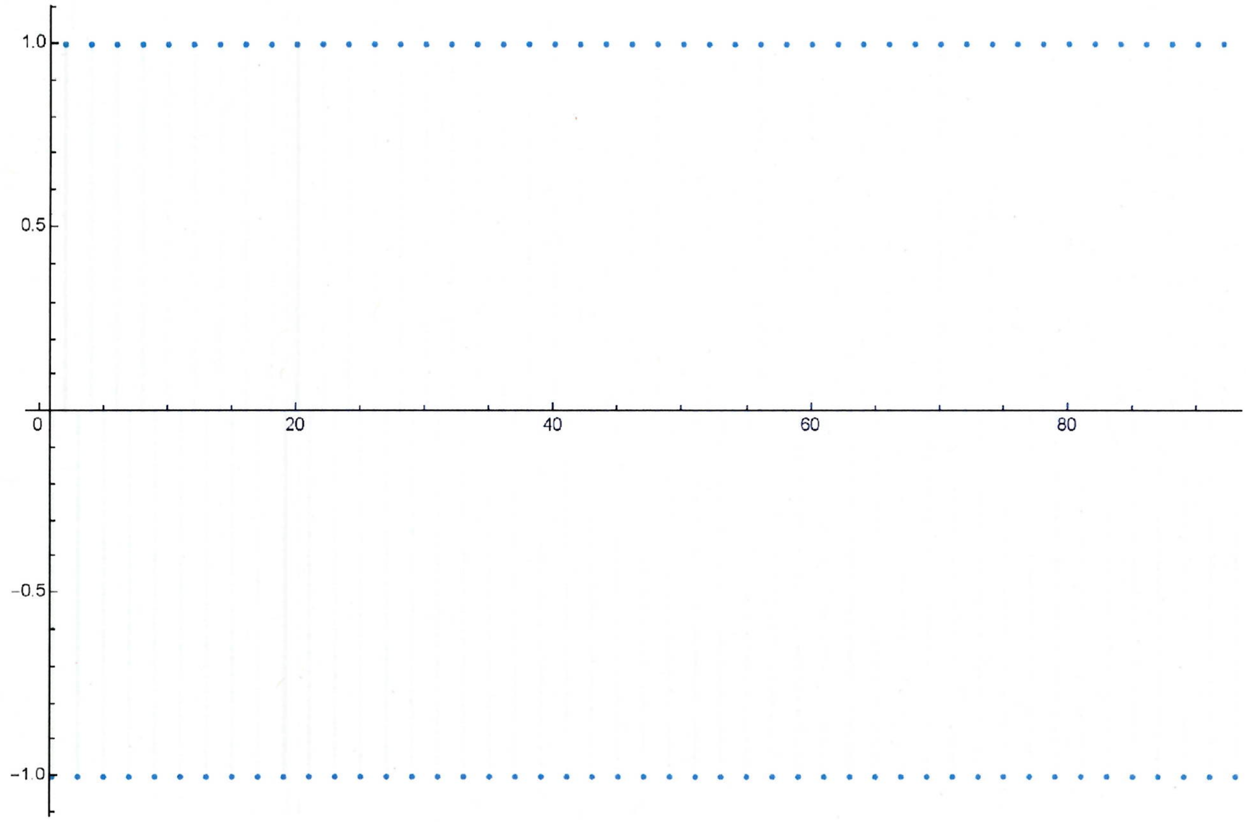


In[5]:=
```
DiscretePlot[(1 + (1 / n)) ^n, {n, 1, 100}]
```

Out[5]=

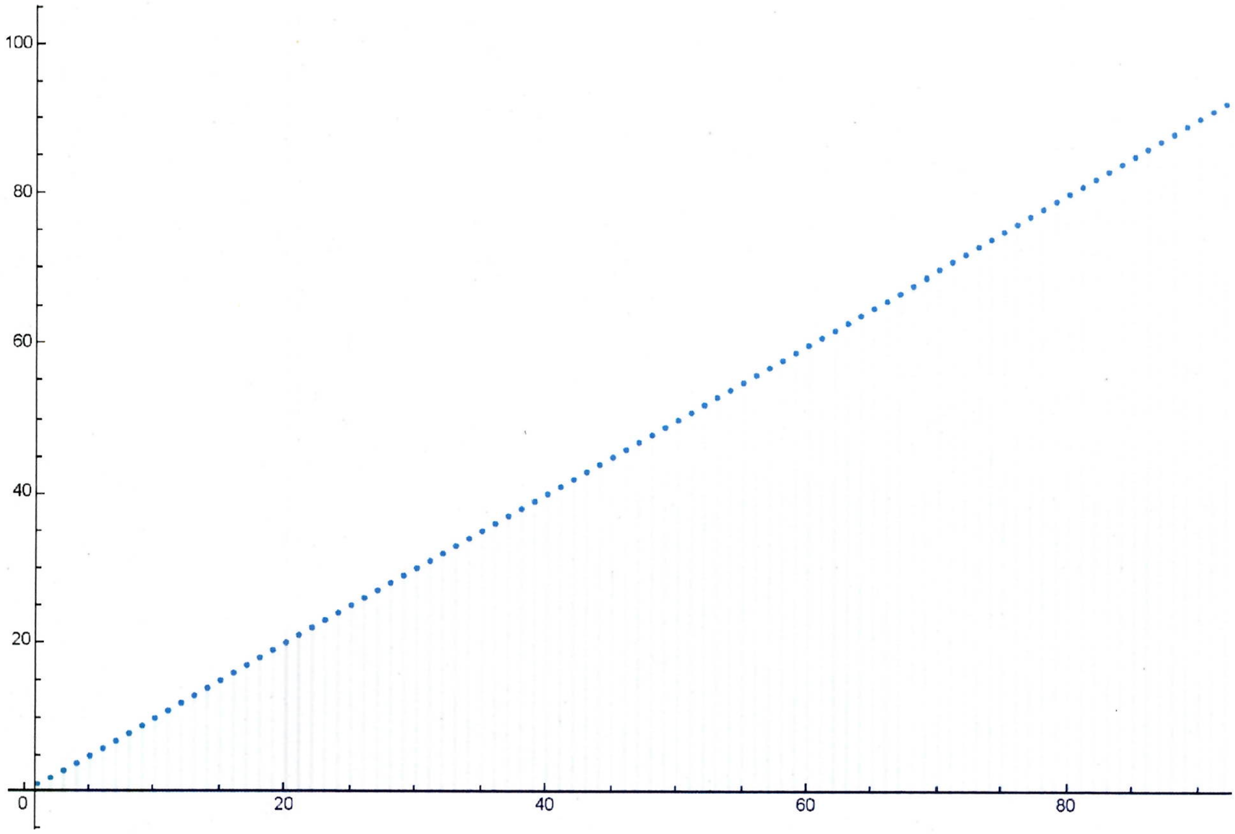


In[6]:=
```
DiscretePlot[(-1)^n, {n, 1, 100}]
```

Out[6]=


In[7]:=
```
DiscretePlot[n, {n, 1, 100}]
```

Out[7]=



Defn Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heisst **Konvergent**, fall es $l \in \mathbb{R}$ gibt so dass $\forall \varepsilon > 0$ die Menge

$$M(\varepsilon) := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin (l-\varepsilon, l+\varepsilon)\}$$

$$= \{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - l| \geq \varepsilon\}$$

endlich ist.

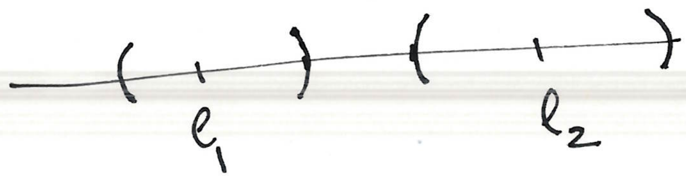
Falls eine solche Zahl l existiert, sie wird mit $\boxed{l = \lim_{n\to\infty} a_n}$ bezeichnet.

l = Grenzwert oder Limes der Folge.

(Bild)

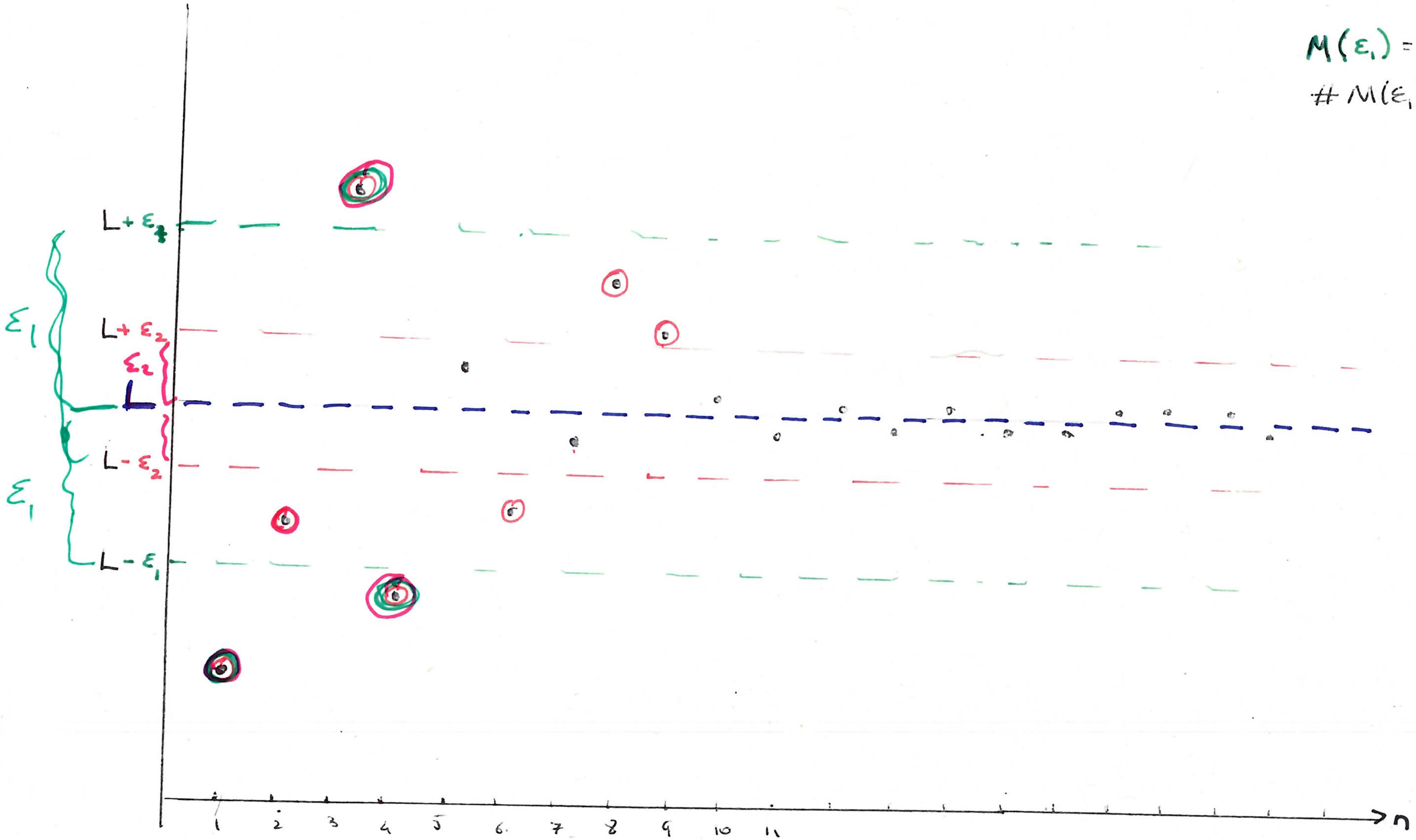
Lemma 2.1.3 Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ ein Folge. Dann gibt es höchstens eine reelle Zahl $l \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\forall \varepsilon > 0$ ist die Menge $M(\varepsilon)$ endlich.

Beweis. Wir nehmen an, dass $l_1 < l_2$ gibt so dass beide l_1, l_2 die Eigenschaft erfüllen.



$M(\varepsilon_1) = \{1, 3, 4\}$

$\# M(\varepsilon_1) = 3$



$M(\varepsilon_2) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$

$\# M(\varepsilon_2) = 7$

1.5

$$\varepsilon = \frac{l_2 - l_1}{3}$$

Dann folgt das
$(l_1-\varepsilon, l_1+\varepsilon) \cap (l_2-\varepsilon, l_2+\varepsilon) = \emptyset$.

Da $\lim a_n = l_1$,
die Menge
$E_1 = M_1(\varepsilon) := \{n \mid a_n \notin (l_1-\varepsilon, l_1+\varepsilon)\}$ ist Endlich.

$E_2 := \{n \mid a_n \notin (l_2-\varepsilon, l_2+\varepsilon)\}$ ist endlich.

$\Rightarrow \mathbb{N} \setminus E_2$ ist unendlich.

Sei $k \in \mathbb{N} \setminus E_2$

$a_k \in (l_2-\varepsilon, l_2+\varepsilon)$

Da $(l_1-\varepsilon, l_1+\varepsilon) \cap (l_2-\varepsilon, l_2+\varepsilon) = \emptyset$

$\Rightarrow a_k \notin (l_1-\varepsilon, l_1+\varepsilon)$

$\Rightarrow k \in E_1$

$\mathbb{N} \setminus E_2 \subset E_1$

Aber $\mathbb{N} \setminus E_2$ ist unendlich und E_1 ist endlich

$\lightning$.

Andere Formulierung des Grenzwerts

Defn Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert mit Grenzwert ℓ falls

Für jedes $\varepsilon>0$, eine Index $\mathbb{N} \ni N = N_\varepsilon \geq 1$ so dass

$$|a_n - \ell| < \varepsilon, \quad \forall n > N_\varepsilon.$$

Lemma 2.1.6. Beide Defn von Grenzwert eine Folge sind äquivalent.

Beweis Übung.

d.h. $\{\forall \varepsilon>0 : M(\varepsilon) := \{n\in\mathbb{N} \mid a_n \notin (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)\}$ ist endlich$\}$

$\Longleftrightarrow$ $(\forall \varepsilon>0 : \exists\, N = N_\varepsilon > 1$ s.d. $|a_n - \ell| < \varepsilon$ $\forall n \geq N_\varepsilon)$.

Beweis

($\Longrightarrow$) Sei $\varepsilon>0$ gegeben. Dann $\{n\in\mathbb{N} \mid a_n \notin (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)\}$ ist endlich. Somit gibt es $N\geq 1$ so dass

$$\{n\in\mathbb{N} \mid |a_n - \ell| \geq \varepsilon\} \subset \{1, 2, \ldots, N\}$$

Dann folgt dass für alle $n > N$

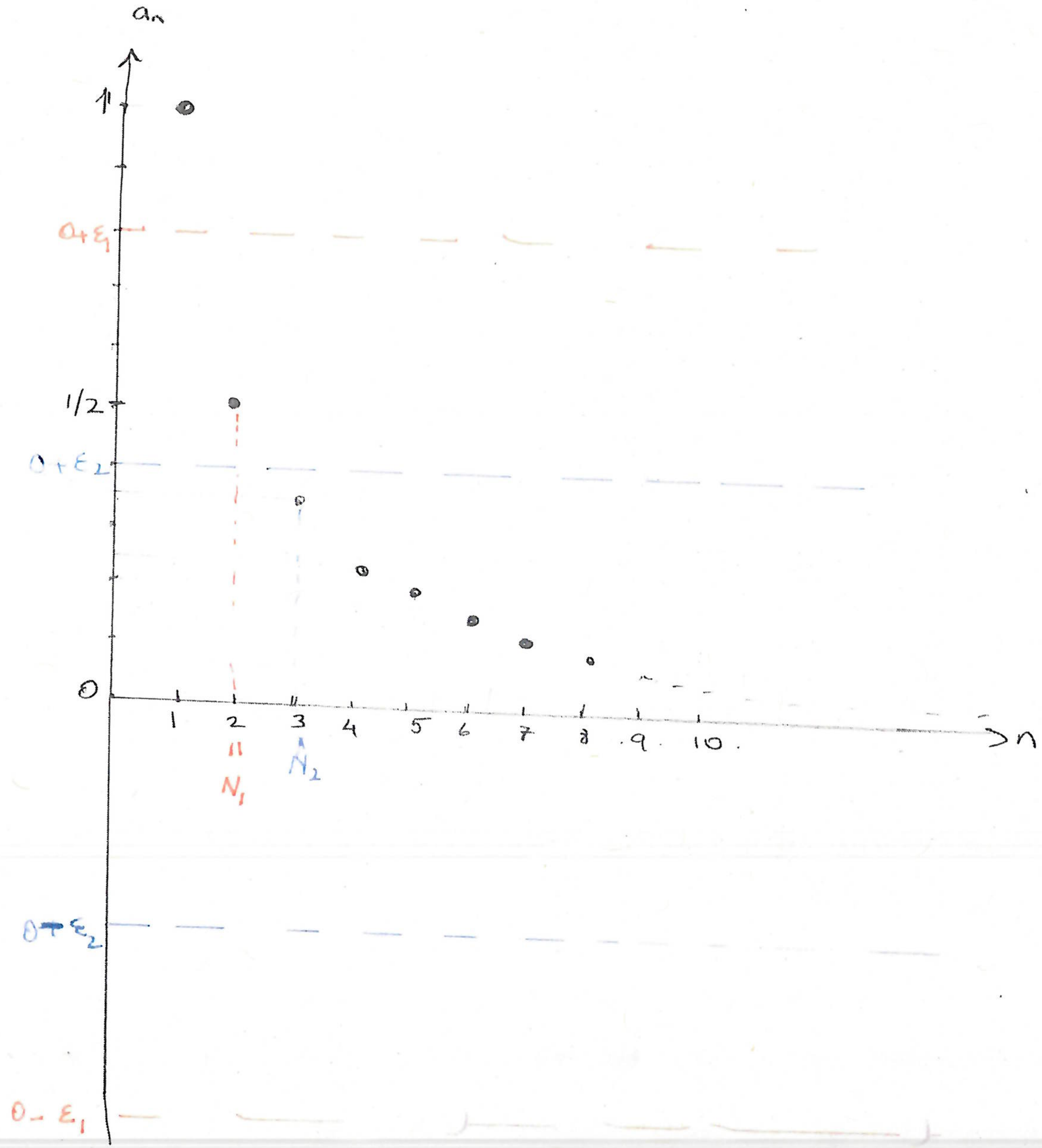
$$|a_n - \ell| < \varepsilon.$$

($\Longleftarrow$) Sei $\varepsilon>0$ gegeben. Dann $\exists N\geq 1$ so dass $|a_n - \ell| < \varepsilon$ $\forall n > N$

d.h. $\{n \mid |a_n - \ell| \geq \varepsilon\} \subset \{1, 2, \ldots N\}$

d.h. $M(\varepsilon) = \{n \mid |a_n - \ell| \geq \varepsilon\}$ ist endlich.

8



$a_n = \frac{1}{n}$.

$\varepsilon_1 = 0.8$

$\varepsilon_2 = 0.4$

For $n \geq 2 = N(\varepsilon_1)$

$|a_n - 0| < 0.8 = \varepsilon_1$

For $n \geq 3 = N(\varepsilon_2)$

$|a_n - 0| \leq 0.4 = \varepsilon_2$

Bsp.: (1) Die konstante Folge

$$a_n = a$$

Dann $\lim a_n = a$

Da, $|a_n - a| = 0 \quad \forall n \geq 1$

$$|a_n - a| = 0 < \varepsilon \ , \ \forall n \geq 1$$

für jede $\varepsilon > 0$

(2) $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

Behauptung: $\lim a_n = 0$

sei $\varepsilon > 0$ gegeben, nach Arch. Prinzip existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{N_0} < \varepsilon .$$

Daher ist für jedes $n \geq N_0$

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| \leq \frac{1}{N_0} < \varepsilon$$

$$\varepsilon_1 = 0.8 = \frac{8}{10} > \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$n \geq N_0 = 2$$

$$\varepsilon_2 = 0.4 = \frac{4}{10} > \frac{1}{3} = 0.33\ldots$$

$$n \geq N_0 = 3.$$

Bmk Nicht alle Folgen sind Konvergent!

Defn Falls (a_n) keinen Limes besitzt, heisst sie **Divergent**

Bsp. (1) $(-1)^n = a_n$

$-1, +1, -1 \ldots$

$|a_n - a_{n+1}| = 2$

kein $\ell \in \mathbb{R}$ ein Grenzwert sein.

Falls existiert, denn für gegebene $\varepsilon > 0$ $\left(\text{z.B. } \varepsilon = \frac{1}{2}\right)$

$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so dass

$|a_n - \ell| < \frac{1}{2}$ $\quad \forall n \geq N_\varepsilon$

$$2 = |a_n - a_{n+1}| = |a_n - \ell + \ell - a_{n+1}|$$

$$\leq |a_n - \ell| + |a_{n+1} - \ell|$$

$$\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \qquad n > N_{1/2}$$

$$2 \leq 1 \; \lightning.$$

Bsp 2 $a_n = n$

ist divergent.

Beweis: Übung

Defn ① Eine Folge heisst **beschränkt** falls die Menge der Folgegliedern $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ~~ist~~ beschränkt ist

② Eine Folge heisst **Nullfolge**, falls, $\lim a_n = 0$

z.B $a_n = \frac{1}{n}$

Bmk 2.1.5.

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

(a_n) konv. $\Longrightarrow \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt

Beweis Übung in Serie 2.

Bmk. $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt $\not\Longrightarrow$ a_n konvergent

z.B $a_n = (-1)^n$

Satz 2.1.8 Seien $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergente Folgen, mit

$$\lim a_n = a \quad , \quad \lim b_n = b$$

① Dann ist $(a_n \pm b_n)_{n\geq 1}$ konvergent mit

$$\lim a_n \pm b_n = \lim a_n \pm \lim b_n$$
$$a \pm b.$$

② $\lim a_n b_n = ab.$

③ Falls $b_n \neq 0 \quad \forall n \geq 1$ und $b \neq 0$, dann ist $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 1}$ konvergent mit Grenzwert

$$\frac{a}{b}.$$

④ Falls es ein Index $K \geq 1$ gibt so dass $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq K$ dann folgt dass

$$a \leq b$$

Beweis: Da $\lim a_n = a$ und $\lim b_n = b$

für $\varepsilon > 0$, $\exists \; N_\varepsilon = N \in \mathbb{N}$. so dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > N_\varepsilon$

$\exists \; M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so dass

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > M_\varepsilon.$$

$$|a_n + b_n - (a+b)| \leq$$
$$|a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

falls $n > \max\{N_\varepsilon, M_\varepsilon\}$.

② Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

z.z. $\exists\, N_\varepsilon = N \in \mathbb{N}$ s.d.

$$|a_n b_n - ab| < \varepsilon \quad \forall n > N_\varepsilon$$

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab|$$

$$\leq |a_n - a|\,|b_n| + |a|\,|b_n - b|$$

Da (b_n) konvergiert, ist sie beschränkt

d.h es gibt $M \geq 1$ mit

$$|b_n| \leq M \qquad \forall n \geq 1$$

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n - a| M + |b_n - b|\,|a|$$

Da a_n, b_n konvergieren, gibt es

$N_1 > 1$ mit $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{M + |a|}$

$\forall n > N_1$

$\exists\, N_2 > 1$ s.d.

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{M + |a|} \quad \text{für } n > N_2$$

Für $n > \max\{N_1, N_2\}$.

$$|a_n b_n - ab| \leq \left(\frac{\varepsilon}{M+|a|}\right) M + \left(\frac{\varepsilon}{M+|a|}\right) |a|$$

$$= \left(\frac{\varepsilon}{M+|a|}\right)(M + |a|)$$

$$= \varepsilon.$$

Bsp. ① $a_n = \frac{n}{n+1}$

$\frac{1}{n} \longrightarrow 0 \qquad \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$

$\frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$

$b_n = 1 \qquad c_n = \frac{1}{n+1}$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$1 \qquad 0$

$b_n - c_n = \frac{n}{n+1} = a_n \longrightarrow 1 - 0 = 1$

② $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^b = 1$

(Hier $b \in \mathbb{Z}^+$.

Wir wissen

$\lim 1 = 1 \qquad \lim \frac{1}{n} = 0$

$\Rightarrow \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + 0 = 1.$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^b = \begin{cases} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{b\text{ mal.}} & b > 0 \\ \dfrac{1}{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{|b|\text{-mal}}} & b < 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow 1.$

(Da $\lim a_n b_n = ab$

$\lim \frac{a_n}{b_n} = a/b.$

③ $a_n = \frac{n^2 - 2n}{n^2 + n + 1} = 1.$

$$= \frac{\cancel{n^2}\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{\cancel{n^2}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \to \frac{1-0}{1+0+0} = 1$$

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \to 0 \cdot 0 = 0.$$

Satz Einschliessungskriterium

(Sandwich Thm)

Seien $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ konvergente Folgen mit

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = L$$

Ist $K \in \mathbb{N}$ und ist $(c_n)_{n \geq 1}$ eine Folge mit der Eigenschaft

$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \geq K$$

Dann konvergiert auch $(c_n)_{n \geq 1}$ gegen L.

Bsp. $\frac{\sin n}{n}$

$$\underset{\downarrow\, 0}{-\frac{1}{n}} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \underset{\downarrow\, 0}{\frac{1}{n}} \to \frac{\sin n}{n} \text{ konv. gegen } 0.$$

Beweis (Sandwich Satz)

$(a_n)_{n\geq 1} := \{a_1, a_2 \dots \}$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Dann $\exists$ $N_1 > K$

und $\exists$ $N_2 > K$

s.d.

$|a_n - L| < \varepsilon \qquad n \geq N_1$

$|b_n - L| < \varepsilon \qquad n \geq N_2$

Falls $n > \max\{N_1, N_2\}$

$|a_n - L| < \varepsilon$, $|b_n - L| < \varepsilon$

Da $a_n \leq c_n \leq b_n$,

$-\varepsilon < a_n - L \leq c_n - L \leq b_n - L < \varepsilon$

d.h. $\forall n > \max\{N_1, N_2\}$

$-\varepsilon < c_n - L < \varepsilon$

$\Rightarrow |c_n - L| < \varepsilon$

Zusammenfassung

Heute ① Grenzwert einer Folge, falls existiert, ist eindeutig bestimmt.

② $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert $\Longrightarrow A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt.

③ Die arithmetische Operationen sind mit Konvergenz verträglich.

Seien $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergente Folgen mit

$\lim a_n = a \qquad \lim b_n = b$

(i) Dann $(a_n \pm b_n)$ konvergiert mit $\lim (a_n \pm b_n) = a \pm b$

(II) $(a_n b_n)_{n\geq 1}$ konvergiert mit $\lim a_n b_n = ab$

(III) Falls $b_n \neq 0 \ \forall n \geq 1$ und $b \neq 0$, dann ist $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 1}$ konvergent mit Grenzwert a/b.

(IV) Falls es ein $K \geq 1$ gibt mit $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq K$ dann folgt $a \leq b$.

Bsp. ① Konstante Folge $a_n = a \ \forall n \geq 1$ ist konvergent, $\lim a_n = a$

② $\lim \frac{1}{n} = 0$

③ $\lim \frac{n}{n+1} = 1$

④ $a_n = (-1)^n$ ist divergent

⑤ $a_n = n$ ist divergent

Einschliessungskriterium (Sandwich thm)

Seien $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergente Folgen mit $\lim a_n = \lim b_n = L \in \mathbb{R}$. Ist $K \in \mathbb{N}$ und ist $(c_n)_{n\geq 1}$ eine Folge mit der Eigenschaft $a_n \leq c_n \leq b_n$ $\forall n \geq K$. Dann konvergiert (c_n) und $\lim c_n = L$.